Лекция 4. Колебания и волны

4.1. Уравнение гармонического осциллятора

Колебание – повторение процессов во времени, напр. по закону гармонических колебаний $x = A\cos(\omega t+\phi_0)$, где $\phi = \omega t+\phi_0$ – фаза, ϕ_0 – начальная фаза, A – амплитуда, $\omega = 2\pi/T$ – циклическая частота, T – период.

x' и x'' $\Rightarrow x'' + \omega^2 x = 0$ – уравнение гармонического осцилятора: колебания под действием квазиупругой силы $F = -m\,\omega^2 x$.

4.2. Энергия колебаний

Для колебаний по закону $x = A\cos(\omega t)$, напр. пружинного маятника массы m и жёсткости k, упругая сила имеет вид $F = -k\,x \Rightarrow \omega^2 = k/m$. Тогда их энергия:

$E = K + U = mx'^2/2 + kx^2/2 =$

$\sin(\omega t)^2\, mA^2\omega^2/2 + \cos(\omega t)^2\, kA^2/2 = kA^2$, т.е.

E *пропорциональна* (амплитуда)^2 и $\langle K\rangle = \langle U\rangle$.

4.3. Затухающие и вынужденные колебания

Для сил сопротивления $F_r = -k_r\,x$ и внешней периодической $F = F_0\cos(\omega t)$ уравнение динамики колебаний $mx'' = -k\,x - k_r\,x + F_0\cos(\omega t)$ имеет решения:

$x = A_r\, e^{-\delta t}\cos(\omega_r t+\psi_0)$ – для затухающих колебаний,

$x = A\cos(\omega t - \phi_0)$ – для вынужденных колебаний после некоторого времени,

где $\delta = k_r/2m$ – коэффициент затухания,

$\omega_r^2 = \omega_0^2 - \delta^2$ – частота затухающих колебаний,

$\omega_0^2 = k/m$ – собственная частота осцилятора,

ϕ_0 – сдвиг фазы относительно вынуждающей силы,

$$A = \frac{F_0}{m\cdot\sqrt{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+4\delta^2\omega^2}}$$ – амплитуда

$$\mathrm{tg}\phi_0 = \frac{2\delta\omega}{\omega_0^2-\omega^2}$$ – и задержка фазы вынужденных колебаний. Возрастание амплитуды до максимума – резонанс – при $\omega^2 = \omega_0^2 - 2\delta^2$.

4.4. Волновое уравнение

Волна – распространение в среде возмущения в виде колебаний частиц среды около положения равновесия. Возмущение может быть в *поперечном* или *продольном* направлениях к скорости волны $\vec{v}$.

$\Rightarrow$.Переносится энергия, но не вещество.

Возмущение в плоской волне, распространяющейся в направлении против/по оси X, в общем виде: $\xi(x,t) = f(t\pm x/v)$, – и $\xi = a\cos(\omega t \pm kx)$ для гармонической волны, где $k = \omega/v = 2\pi/\lambda$ – волновое число и $\lambda = vT$ – длина волны. Фронт – область колебаний в одной фазе.

ξ_{xx}'' и $\xi_{tt}'' \Rightarrow \xi_{xx}'' = \frac{1}{v^2}\xi_{tt}''$ – волновое уравнение.

4.5. Вектор Умова

Плотность потока энергии волны: $\vec{j_W} = w\vec{v}$ – вектор Умова, где $w = w_K + w_U$ – плотность энергии волны.

Интенсивность волны: $I = \langle j\rangle$.

Поток энергии: $\Phi = \int \vec{j_W}\, d\vec{S}$.

Т.к. ξ_t' – скорость частиц среды, то средняя плотность энергии волны в среде плотности ρ:

$\langle w\rangle = \langle w_K\rangle + \langle w_U\rangle = 2\langle w_K\rangle = \rho\xi_t'^2$.

Для гармонической волны: $\langle w\rangle = \frac{1}{2}\rho A^2\omega^2$.

4.6. Эффект Доплера

Это изменение частоты волны ν на приёмнике при его движении относительно источника:

$$\nu' = v_{sx}'/\lambda' = \frac{v_s - v_{пх}}{T\cdot(v_s - v_{их})} = \nu\,\frac{v_s - v_{пх}}{v_s - v_{их}},$$

где v_s, v_{sx}', $v_{пх}$, $v_{их}$ – скорости звука относительно среды и относительно приёмника в проекции на ось X (от источника к приёмнику), X-проекции скоростей приёмника и источника относительно среды.

к.физ.-мат.н. А. Панфёров, ТГУ, 2013